جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة
مقياس : رياضيات II

السنة الدراسية: 2023/2022
التاريخ: 30/05/2023

امتحان السداسي الثاني

الجزء الأول: الجبر

تمرين 1 : (7 نقاط)

لتكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) أوجد كثير الحدود المميز لـ A :

Find the characteristic polynomial of A :

2) أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A ثم حدد درجة تضاعف كل قيمة.

Find the eigenvalues of matrix A, and then determine the multiplicity of each eigenvalue.

3) حدد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية

Determine the sub-eigen-vectorial spaces

4) هل المصفوفة A قابلة للتقطير في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

The matrix A is diagonalizable to $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$*?*

5) أوجد المصفوفة P و المصفوفة القطرية D المرافقة لها.

Find the matrix P and the diagonal matrix D that accompanies it.

تمرين 2 : (3 نقاط)

لتكن المصفوفة

Let the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أحسب مقلوب المصفوفة B باستعمال طريقة غوص

Calculate the inverse of matrix B using the Gauss-Jordan elimination method.

الجزء الثاني : التحليل

تمرين 3 : (5 نقاط)

أحسب بالتجزئة التكاملات التالية :

Calculate the following integrals by integration by parts:

$$1) \quad \int \arcsin x \, dx, \qquad 2) \quad \int x^2 e^x dx.$$

علما أن

Knowing that

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

تمرين 4 : (5 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية

Let the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + yx^5 = x^5 y^7$$

1) أثبت أنها معادلة برنولي

Prove that it is a Bernoulli equation.

2) أوجد حلولها.

Find its solutions.

حل الإمتحان للسداسي الثاني

حــل التمرين رقم 1

لتكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

لنثبت أن A قابلة للتقطير في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ثم نبحث عن المصفوفة P حيث $P^{-1}AP$ حتى تكون مصفوفة قطرية.

Let's prove that A is diagonalizable to $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ and then find the matrix P where $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

1) **نبدأ بحساب كثير الحدود المميز لـ A :**

We start by calculating the characteristic polynomial of A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

2) **جذور كثير الحدود المميز هي الأعداد الحقيقية 1 بدرجة تضاعف $m(1) = 2$ و 2 درجة التضاعف $m(2) = 1$.**

The roots of the characteristic polynomial are the real numbers 1 with a multiple of $m(1) = 2$ and 2 with a multiple of $m(2) = 1$.

3) **لنحدد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية**

Let's define the sub-eigen-vectorial spaces

A) **ليكن E_1 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية المضاعفة 1 :**

Let E_1 be the sub-eigen-vectorial space of the doubled eigenvalue 1 :

$$E_1 = Ker(A - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = X\}.$$

إذا وضعنا

If we put

$$X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$$

then: **ومنه :**

$$X \in E_1 \iff AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x, & y, & y - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

المستوي المولد على سبيل المثال من الأشعة $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **و** $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **تشكل أساس.**

The generated plane for example from the vectors $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ and $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forms a basis.

$B)$ **ليكن** E_2 **الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة** 2 :

Let E_2 be the sub-eigen-vectorial space associated with the simple eigenvalue 2 :

$$E_2 = Ker(A - 2I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = 2X\}.$$

then **ومنه :**

$$X \in E_2 \iff A \cdot X = 2X \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0 \text{ and } \ y = 0$$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ **هو مستقيم شعاع توجيهه** $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **و يشكل أساس له.**

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ he is straight with vector beam $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and forms the basis for it.

3) **أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية مساوية لدرجة تضاعف القيم الذاتية المرافقة لها:**

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the degree of multiplication of their associated eigenvalues:

$$\dim E_1 = 2 = m(1), \quad \dim E_2 = 1 = m(2).$$

Because **4) بما أن**

$$\dim E_1 = 2 = m(1), \quad \dim E_2 = 1 = m(2).$$

فإن المصفوفة A **قابلة للتقطير.**

So the matrix A is diagonalizable.

5) في الأساس (X_1, X_2, X_3)، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة A (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

In the base (X_1, X_2, X_3), the endomorphism represented by the matrix A (in the canonical basis) has the matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع P مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها X_1، X_2 و X_3 على الترتيب أي:

In other words, we put P the transit matrix whose column vectors are X_1, X_2 and X_3 in order, i.e.:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ومنه $P^{-1}AP = D$.

then, $P^{-1}AP = D$.

حـــل التمرين رقم 2

طريقة غوص لحساب معكوس المصفوفة B:

The Gauss-Jordan elimination method to calculate the inverse of matrix B:

الخطوة 1: المصفوفة المعززة B بمصفوفة الوحدة بنفس الحجم

Step 1: Augment the matrix B with an identity matrix of the same size:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

الخطوة 2: تنفيذ عمليات الصف لتحويل الجانب الأيسر من المصفوفة المضافة إلى المصفوفة الوحدة.

Step 2: Perform row operations to transform the left side of the augmented matrix into the identity matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

So ومنه

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \end{array}$$

الخطوة 3: **الجانب الأيمن للمصفوفة المضافة هو الآن المعكوس للمصفوفة** B.

Step 3: The right side of the augmented matrix is now the inverse of matrix B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

حـــل التمرين رقم 3

1) **لحساب التكامل**

To calculate the integral

$$\int \arcsin x \, dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$

to finds a primitive function of the $\arcsin(x)$ function

نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ **و** $v'(x) = 1$،

we make it in the form of a product, we put $u(x) = \arcsin(x)$ and $v'(x) = 1$,

حيث لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **و** $v(x) = x$،

where we have $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ and $v(x) = x$,

ثم نطبق صيغة التكامل باتجزئة فنجد

then we use the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \arcsin(x) dx &= [x \arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= [x \arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

2) **حساب التكامل**

To calculate the integral

$$\int x^2 e^x dx.$$

نضع $u(x) = x^2$ **و** $v'(x) = e^x$.

we put $u(x) = x^2$ and $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 2x$ **هي الدالة المشتقة للدالة** $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 2x$ is the derivative of $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$

and $v(x) = e^x$ is the primitive function of $v'(x)$

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

and by using the integration by parts formula we find:

$$\int x^2 e^x \, dx = \left[x^2 e^x\right] - 2 \int x e^x \, dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساوات السابقة نجد:

Re-integrating by parts for the second time on the second part of the previous equations, we find:

$$\int x e^x \, dx = [x e^x] - \int e^x \, dx = (x-1)e^x + c,$$

في الأخير نجد

Finally we find

$$\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

حــل التمرين رقم 4

1) لتكن المعادلة التفاضلية

Let the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + yx^5 = x^5 y^7$$

هي معادلة برنولي مع $P(x) = x^5$ و $Q(x) = x^5$ و $n = 7$.

It is a Bernoulli equation with $P(x) = x^5$, $Q(x) = x^5$, and $n = 7$.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

2) حل المعادلة، لنستعمل طريقة التعويض:

Solve the equation, we use the substitution method:

$$u = y^{1-n} = y^{-6}$$

بعبارة y تعطينا:

In terms of y that is:

$$y = u^{-1/6}$$

نشتق y بالنسبة إلى x:

Differentiate y with respect to x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{6} u^{-7/6} \frac{du}{dx}.$$

نعوض $\frac{dy}{dx}$ و y في المعادلة الأصلية

Substitute $\frac{dy}{dx}$ and y into the original equation

$$\frac{-1}{6}u^{-7/6}\frac{du}{dx}+x^5u^{-1/6}=x^5u^{-7/6}$$

Multiply all terms by $-6u^{7/6}$

بضرب كل الأطراف في $-6u^{7/6}$

$$\frac{du}{dx}+x^5u=-6x^5.$$

لدينا الآن معادلة يمكن حلها.

We now have an equation we can hopefully solve.

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الشكل :

The general solution of the differential equation is of the form:

$$u(x)=e^{-I(x)}\left(\int e^{I(x)}Q\left(x\right)dx+c\right)$$

where :

حيث :

$$I\left(x\right)=\int P\left(x\right)dx=\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6.$$

so

ومنه

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\frac{1}{6}x^6}\left(\int e^{\frac{1}{6}x^6}\left(-6x^5\right)dx+c\right)\\ &= e^{-\frac{1}{6}x^6}\left(-6e^{\frac{1}{6}x^6}+c\right)\\ &= ce^{-\frac{1}{6}x^6}-6 \end{aligned}$$

we have

لدينا

$$y(x) = u^{-1/6} \Longrightarrow \quad y(x) =\left(ce^{-\frac{1}{6}x^6}-6\right)^{-1/6}$$

and c is a constant.

و c عدد ثابت .