Faculté: SESNV | Université Mohamed Khider Biskra | Dpt de Mathématiques
$\mathbf{2}^{ème}$ A. Maths | 30/05/2023: 10.00-11.30 Amphi I | Module: Analyse Complexe

# Examen: Analyse Complexe

Exercice I. ((0.5+0.5)+1+1.5+(1+1)+1.5+1+1) = 09 pts

Soit $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f = P + iQ$ une fonction complexe définie sur $U$ par:

$$f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{array}$$

On suppose que $f$ et $h = \overline{f} + z$ sont holomorphes sur $U$.
où, $\overline{f}$ est la conjuguée de $f$.

1) Trouver les parties réelle et imaginaire de $h = \overline{f} + z$.
2) Donner les conditions de Cauchy-Riemann pour $f$.
3) Donner les conditions de Cauchy-Riemann pour $h$.
4) En déduire les valeurs de $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ sur $U$.
5) Donner l'expression de la dérivée de $f$, $f'$, en fonction de $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$.
6) En déduire la valeur de la dérivée de $f$, $f'$, sur $U$.
7) Est-ce que $f$ est constante sur $U$?

Exercice II. (1+1+1+(1+1)+(1.5+1.5)+1) = 09 pts

Soit la fonction complexe $f$ à variable complexe $z$ définie par:

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$$

et le chemin $\gamma$ défini par:

$$\gamma: \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = e^{it} \end{array}$$

1- Trouver $z_0$ et $r$ tel que l'équation de $\gamma$ s'écrit sous la forme: $|z - z_0| = r$, où $z = \gamma(t)$.
2- Trouver les points singuliers de $f$.
3- Est-ce les points singuliers de $f$ appartiennent à l'intérieur de $\gamma$?
4- Trouver les zéros de $f$ et leurs ordres.
5- Calculer l'intégrale: $\int_\gamma f(z)dz$.
par deux méthodes ( formule intégrale de Cauchy et intégrale curviligne).
6- En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^{2\pi} \sin(\cos(t))sh(\sin(t))dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos(\cos(t))ch(\sin(t))dt$$

Remarque. La bonne tenue de votre copie = (02) pts.
Justifier vos réponses.

# CORRIGE TYPE Examen: Analyse Complexe

Solution I. ((0.5+0.5)+1+1.5+(1+1)+1.5+1+1) = 09 pts

1) Les parties réelle et imaginaire de $h$:
on a,

$$\forall z = x + iy \in U, h(z) = \overline{f}(z) + z = P(x,y) - iQ(x,y) + x + iy$$

d'où,

$$\forall (x,y) \in U, \quad \mathcal{R}e(h)(x,y) = P(x,y) + x, \qquad \mathcal{I}m(h)(x,y) = y - Q(x,y).$$

2) Les conditions de Cauchy-Riemann pour $f$:

$$\forall (x,y) \in U, \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

3) Les conditions de Cauchy-Riemann pour $h$:

$$\forall (x,y) \in U, \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}e(h)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \mathcal{I}m(h)}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \mathcal{R}e(h)}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial \mathcal{I}m(h)}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in U, \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + 1 = 1 - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in U, \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

4) Déduction des valeurs de $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ sur $U$ :
on déduit de (2) et (3) que,

$$\forall (x,y) \in U, \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \Longrightarrow \forall (x,y) \in U, \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0.$$

$$\forall (x,y) \in U, \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \Longrightarrow \forall (x,y) \in U, \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0.$$

5) Expression de la dérivée de $f$, $f'$, en fonction de $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$:

$$\forall z = x + iy \in U, f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

6) Déduction de la valeur de la dérivée de $f$, $f'$, sur$U$:
De (4) et de (5) on a,

$$\forall z = x + iy \in U, f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 + i0 = 0.$$

7) Oui $f$ est constante sur $U$, car sa dérivée est nulle sur $U$ d'après (6).

Solution II. $(1+1+1+(1+1)+(1.5+1.5)+1) = 09$ pts

1- Ecriture de l'équation de $\gamma$. On a,

$$z = \gamma(t) = e^{it} \Longrightarrow |z| = \left|e^{it}\right| = 1$$

d'où,

$$|z| = 1.$$

2- points singuliers de $f$:
Comme $f\ (z) = \frac{\cos z}{z}$ est un quotient et $\cos z$ est définie dans tout $\mathbb{C}$, alors le seul point singulier de $f$ est $z_0 = 0$.

3- Oui, le point singulier $z_0 = 0$ appartient à l'intérieur de $\gamma$, car

$$|z_0| = |0| = 0 < 1.$$

4- Les zéros de $f$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{z} = 0 \Longleftrightarrow \cos z = 0 \text{ et } z \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z} \\ \Longleftrightarrow & \quad z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

d'où les zéros de $f$ sont: $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Les ordres des zéros de $f$:

$$f'(z_k) = \frac{-z_k \sin(z_k) - \cos(z_k)}{z_k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \neq 0$$

d'où les zéros $z_k$ de $f$ sont d'ordre 1, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

5- Calcul de l'intégrale par la formule intégrale de Cauchy:
comme la fonction *cos* est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $z_0 = 0$ appartient à l'intérieur de $\gamma$ alors en utilisant la formule intégrale de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

on a,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i.$$

Calcul de l'intégrale par la l'intégrale curviligne:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

on a,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{it})}{e^{it}} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} \cos(e^{it})dt = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{ie^{it}}+e^{-ie^{it}}}{2}dt \\
&= \frac{i}{2}\left(\int_0^{2\pi} e^{ie^{it}}dt + \int_0^{2\pi} e^{-ie^{it}}dt\right) = \frac{i}{2}\left(\int_0^{2\pi} e^{i(\cos t+i\sin t)}dt + \int_0^{2\pi} e^{-i(\cos t+i\sin t)}dt\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\int_0^{2\pi} e^{i\cos t-\sin t}dt + \int_0^{2\pi} e^{-i\cos t+\sin t}dt\right) = \frac{i}{2}\left(\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}e^{i\cos t}dt + \int_0^{2\pi} e^{\sin t}e^{-i\cos t}dt\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\left(\cos(\cos t)+i\sin(\cos t)\right)dt + \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\left(\cos(\cos t)-i\sin(\cos t)\right)dt\right) \\
&= i\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{\sin t}+e^{-\sin t}}{2}\right)\cos(\cos t)dt - i\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{\sin t}-e^{-\sin t}}{2}\right)\sin(\cos t)dt\right) \\
&= i\left(\int_0^{2\pi}(ch(\sin t))\cos(\cos t)dt - i\int_0^{2\pi}(sh(\sin t))\sin(\cos t)dt\right) \\
&= \int_0^{2\pi}(sh(\sin t))\sin(\cos t)dt + i\int_0^{2\pi}(ch(\sin t))\cos(\cos t)dt.
\end{aligned}$$

6- De (5) on a,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz = \int_0^{2\pi}(sh(\sin t))\sin(\cos t)dt + i\int_0^{2\pi}(ch(\sin t))\cos(\cos t)dt = 2\pi i$$

d'où,

$$\int_0^{2\pi}\sin(\cos(t))sh(\sin(t))dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi}\cos(\cos(t))ch(\sin(t))dt = 2\pi.$$

Remarque. La bonne tenue de votre copie = (02) pts.
Justifier vos réponses.