

Faculté: SESNV  
2<sup>ème</sup> A. Maths

Université Mohamed Khider Biskra  
21/05/2024: 10.30-12.00 Amphi I

Dpt de Mathématiques  
Module: Analyse Complexe

## Examen: Analyse Complexe

Exercice I. 0.5+1.5+1+3 = 06 pts

Soit la fonction  $f$  définie par:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 + 5z^2 + 8z + 4}$$

et  $\gamma$  le cercle d'équation

$$|z + 2| = \frac{1}{2}.$$

- 1) Faire un dessin de  $\gamma$ .
- 2) Trouver les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  telles,

$$\frac{1}{z^3 + 5z^2 + 8z + 4} = \frac{A}{z + 1} + \frac{Bz + C}{(z + 2)^2}$$

- 3) Est-ce que  $z_1 = -1$  et  $z_2 = -2$  appartiennent à l'intérieur ou à l'extérieur de  $\gamma$ ?

- 4) Calculer l'intégrale,

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Exercice II. (2+0.5)+2+(0.5+0.5)+0.5 = 06 pts

Soit la fonction  $f$  définie par:

$$f(z) = \frac{1}{z + 1}$$

- 1- Développer  $f$  en série de Taylor suivant les puissances de:  $z - 1$  et trouver le rayon de convergence de la série.
- 2- Développer  $f$  en série de Laurent dans la couronne,

$$2 < |z - 1| < 3.$$

- 3- Calculer les coefficients  $a_3$  dans (1) et  $a_{-2}$  dans (2).
- 4- Faire un dessin de la couronne.

Exercice III. (1.5+1.5)+(1+2) = 06 pts

Soit la fonction  $f$  définie par:

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^3 + 5z^2 + 8z + 4}$$

- 1) Trouver les zéros de  $f$  et déterminer leurs ordres.
- 2) Trouver les points singuliers de  $f$  et déterminer leurs caractères.

Remarque. La bonne tenue de votre copie = (02) pts.

Justifier vos réponses.

1)

2) On a,

$$\begin{aligned} \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{(z+2)^2} &= \frac{A(z+2)^2}{z+1} + \frac{(Bz+C)(z+1)}{(z+2)^2} = \frac{A(z^2+4z+4) + (Bz+C)(z+1)}{(z+1)(z+2)^2} \\ &= \frac{(A+B)z^2 + (4A+B+C)z + 4A+C}{(z+1)(z+2)^2} = \frac{1}{z^3+5z^2+8z+4} \\ \iff A+B &= 0, \quad 4A+B+C=0 \quad \text{et} \quad 4A+C=1 \iff A=1, \quad B=-1 \quad \text{et} \quad C=-3. \end{aligned}$$

3) On a,

$$|-1+2| = 1 > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |-2+2| = 0 < \frac{1}{2}$$

d'où,  $z_1 = -1$  appartient à l'extérieur du cercle et  $z_2 = -2$  appartient à l'intérieur du cercle.

4) On a, en utilisant les formules intégrales de Cauchy,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \left( \frac{e^z}{z+1} - \frac{(z+3)e^z}{(z+2)^2} \right) dz = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z+1} dz + \int_{\gamma} -\frac{(z+3)e^z}{(z+2)^2} dz = 0 - 2\pi i ((z+3)e^z)'_{z=-2} = -4\pi i e^{-2}.$$

Solution II.  $(2+0.5)+2+(0.5+0.5)+0.5 = 06$  pts

1- En utilisant la somme d'une série géométrique, on a,

$$f(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+1+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n.$$

On a,

$$\left| -\frac{z-1}{2} \right| < 1 \iff |z-1| < 2 = R$$

d'où le rayon de convergence de la série est  $R = 2$ .

2- Comme dans la couronne  $\left| -\frac{2}{z-1} \right| < 1$ , on a,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+1+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{2}{z-1}\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

3- On a,

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{2^{3+1}} = \frac{-1}{2^4} = -\frac{1}{16}, \quad a_{-2} = (-1)^1 2^1 = -2.$$

4-

Solution III. (1.5+1.5)+(1+2) = 06 pts

1) On a,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+2)^2} = 0 \iff z^2 - 4 = 0 \text{ et } (z+1)(z+2)^2 \neq 0 \\ &\iff (z=2 \text{ ou } z=-2) \text{ et } (z \neq -1 \text{ et } z \neq -2) \iff z=2 \end{aligned}$$

d'où un seul zéro pour  $f : z_1 = 2$ .

On a,

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+2)^2} = (z-2) \left( \frac{z+2}{(z+1)(z+2)^2} \right) = (z-2)g(z)$$

avec  $g(2) = \frac{1}{12} \neq 0$ , d'où le zéro  $z_1 = 2$  est d'ordre 1.

2) Les points singuliers de  $f$  sont les points tels que,

$$(z+1)(z+2)^2 = 0 \iff z = -1 \text{ ou } z = -2$$

d'où les points singuliers de  $f$  sont:  $z_1 = -1$  et  $z_2 = -2$ .

Déterminons le caractère de  $z_1 = -1$ .

On a,

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+2)^2} = \frac{1}{z+1} \left( \frac{z^2 - 4}{(z+2)^2} \right) = \frac{1}{z+1}g(z)$$

avec  $g(-1) = -3 \neq 0$ , d'où le point singulier  $z_1 = -1$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$ .

Déterminons le caractère de  $z_2 = -2$ .

On a,

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+2)^2} = \frac{z+2}{(z+2)^2} \left( \frac{z-2}{z+1} \right) = \frac{1}{z+2}g(z)$$

avec  $g(-2) = 4 \neq 0$ , d'où le point singulier  $z_1 = -2$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$ .

Remarque. La bonne tenue de votre copie = (02) pts.

Justifier vos réponses.