Contrôle de connaissance

Durée : 1h30
Date : 11/01/2025

Question 1.

1. Montrer que le rapport de températures totale et statique peut s'écrire en fonction du nombre de Mach par la relation suivante :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

2. Pour déterminer les conditions à la sortie de la première partie de la chambre de combustion (entre 3 et 3'), on exprime les pertes de pression dues aux frottements sous la forme adimensionnelle suivante :

$$k = \frac{2(P_{03} - P_{03'})}{\rho_3 q_3^2}$$

Où k est un nombre empirique tel que : $1 \leq k \leq 4$ (en pratique).

Montrer que, le rapport de pression totale $P_{03'}/P_{03}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{P_{03'}}{P_{03}} = 1 - \frac{k \quad \gamma M_3^2}{2\ (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Question 2.

Un avion de transport civil propulsé par quatre turboréacteurs vole à un nombre de Mach de 0.85 et à l'altitude où la température ambiante est 230 °K. Le taux de compression du compresseur est 20 et la température maximale est 1500 °K. En raison de l'ingestion d'un oiseau, un moteur est tombé en panne et l'avion a continué de voler avec trois moteurs à la même altitude et au même nombre de Mach. Le pilote a avancé le levier des gaz pour augmenter le débit de carburant et donc la température d'entrée de la turbine a entraîné une augmentation de la vitesse des gaz d'échappement pour compenser la poussée du moteur défaillant. La force de poussée des moteurs opérationnels a donc été augmentée.

Supposons que :

- Tous les processus sont idéaux ;
- La chaleur spécifiques et le rapport des chaleurs massiques sont constants dans tous les éléments du turboréacteur, et que $C_p = 1005\ J.kg^{-1}.°K^{-1}$ et $\gamma = 1.4$;
- Les travaux du compresseur et de la turbine sont égaux
- Le débit massique d'air dans chaque moteur est constant dans les deux cas.
- Le rapport de mélange est négligeable dans le calcul de la poussée et la tuyère est adaptée.

On demande de :

1. Calculer la vitesse de l'avion.
2. Tracer le diagramme T-S du turboréacteur pour les deux cas.
3. Calculer le rapport de mélange dans les deux cas (le pouvoir calorifique inférieur du carburant est 42 000 $kJ.kg^{-1}$).
4. Calculer les vitesses d'échappement avant et après la défaillance du quatrième moteur.
5. Calculer la nouvelle température totale maximale.

Correction du contrôle

11/01/2025 :

Réponse : 1) 5 points

a/ $h_0 = h + \frac{q^2}{2} \Rightarrow T_0 = T + \frac{q^2}{2c_p}$.

h : enthalpie
h_0 : enthalpie totale.
M : nombre de Mach.
q : la vitesse du gaz
c : la vitesse du son dans le gaz

$M = \frac{q}{c} = \frac{q}{\sqrt{\gamma R T}} \Rightarrow q^2 = \gamma R T \cdot M^2$ (2)

$R = \frac{c_p(\gamma-1)}{\gamma}$ donc : $q^2 = c_p(\gamma-1) M^2 \cdot T$

$$T_0 = T + \frac{c_p \cdot (\gamma-1) M^2 \cdot T}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

b/ $K = \frac{2(P_{03} - P_{03}')}{\rho_3 \, q_3^2} \Rightarrow K = \frac{2\left(\frac{P_{03}}{P_{03}} - \frac{P_{03}'}{P_{03}}\right)}{\frac{\rho_3 \, q_3^2}{P_{03}}}$

$$\Rightarrow \frac{P_{03}'}{P_{03}} = 1 - \frac{K}{2 \, \frac{\rho_3 q_3^2}{P_{03}}}.$$ (3)

Le gaz est parfait donc : $P = \rho R T$, et $q^2 = M^2 \gamma R T$

$$\frac{\rho_3 \, q_3^2}{P_{03}} = \rho_3 \frac{M_3^2 \, \gamma R T_3}{P_{03}} = M_3^2 \, \gamma \frac{P_3}{P_{03}} = \frac{\gamma M_3^2}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2\right)^{\gamma/\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{03}}{P_{03}'} = 1 - \frac{K \gamma M_3^2}{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2\right)^{\gamma/\gamma-1}}$$

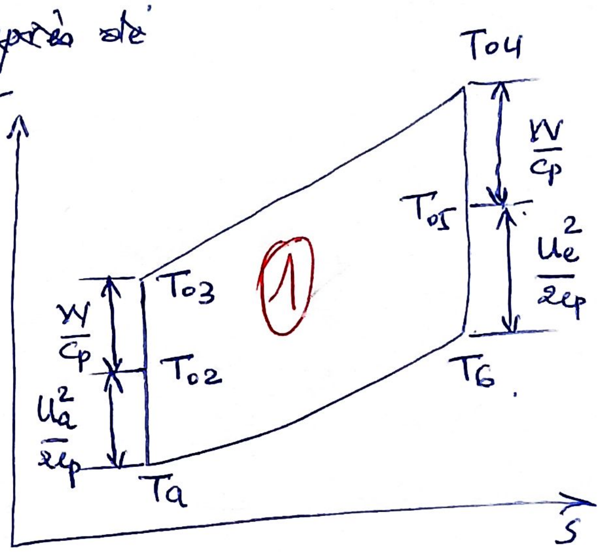
Reponse 2 : 15 points

A/ Le cas de quatre moteurs opérationnels.

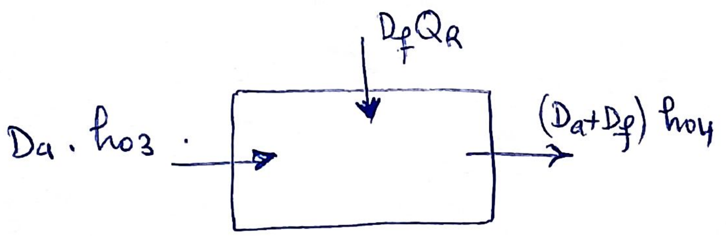
1/ - la vitesse de vol : $U = M_a \sqrt{\gamma R T_a} = M_a \sqrt{C_p(\gamma-1) T_a}$

$U = 0{,}85 \cdot \sqrt{1005 \cdot 0{,}4 \cdot 230}\ \frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $\boxed{U = 258.5\ \frac{m}{s}}$ 1

2/. Le diagramme T-s du T-R ~~après de~~



3/. Le rapport de mélange.



$$\frac{D_a \cdot h_{o3}}{D_a} + \frac{D_f}{D_a} \cdot Q_R = \frac{(D_a + D_f)\ h_{o4}}{D_a}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{T_{o4} - T_{o3}}{\frac{Q_R}{C_p} - T_{o4}} .$$ 1

* calcul de T_{o3} :

Dans le compresseur : $\frac{T_{o3}}{T_{o2}} = \left(\frac{P_{o3}}{P_{o2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (\tau_c)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

$$\Rightarrow T_{o3} = T_{o2} (\tau_c)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} .$$

au bord d'attaque : $T_{o2} = T_{oa} = T_a \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2\right)$

$$= 230 \left(1 + \frac{0{,}4}{2} \cdot 0{,}85^2\right) K .$$

$\boxed{T_{o2} = 263.24\ °K}$ 1

$T_{o3} = 263.24 \cdot (20)^{\frac{0.4}{1.4}}\ K$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_{o3} = 620\ °K}$. 1

2/5

$$f = \frac{1500 - 620}{\frac{42000}{1005} \cdot 10^3 - 1500} \Rightarrow \boxed{f = 0{,}02184} \quad 1$$

4/ La vitesse d'échappement :

Dans la tuyère : $h_{05} - h_{06} = 0 \Rightarrow \frac{u_e^2}{2c_p} = h_{05} - h_6$.

$$u_e = \sqrt{2c_p\,(T_{05} - T_6)}$$

* Calcul de T_{05} :

Dans la turbine : $W = c_p(T_{04} - T_{05}) \Rightarrow$

$$T_{05} = T_{04} - \frac{W}{c_p}.$$

Dans le Compresseur :

$$W = h_{03} - h_{02} \Rightarrow W = c_p(T_{03} - T_{02})$$

Donc : $T_{05} = T_{04} - T_{03} + T_{02} = (1500 - 620 + 263{,}24)°K$.

$$\boxed{T_{05} = 1143{,}24°K} \quad 1$$

* Calcul de T_6 :

$$\frac{T_6}{T_{04}} = \left(\frac{P_6}{P_{04}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad ; \quad P_6 = P_a \text{ et } P_{04} = P_{03}.$$

$$\frac{P_{04}}{P_6} = \frac{P_{03}}{P_a} = \frac{P_{03}}{P_{02}}\,\frac{P_{02}}{P_a} = \tau_c\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2\right).$$

$$\frac{P_{04}}{P_6} = 20\left(1 + \frac{0{,}4}{2}\,0{,}85^2\right) = 22.89.$$

$$T_6 = T_{04} \cdot \left(\frac{P_{04}}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1500 \cdot (22.89)^{\frac{-0{,}4}{1{,}4}} = 613{,}22°K.$$

$$\boxed{T_6 = 613{,}22°K} \quad 1$$

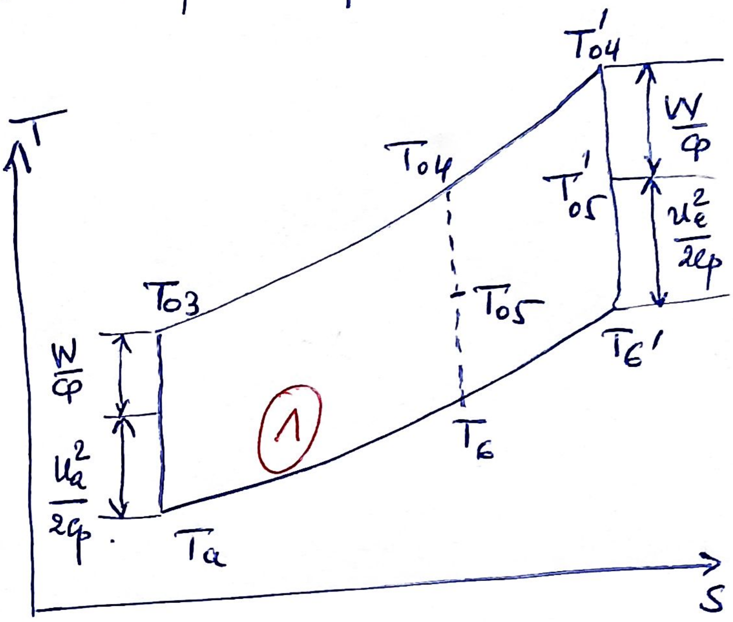
$$u_e = \sqrt{2c_p \cdot (T_{05} - T_6)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 1005 \cdot (1143{,}24 - 613{,}22)} \ \frac{m}{s}.$$

$$\boxed{u_e = 1032 \ \frac{m}{s}.}$$ 1

B/ Seulement trois moteurs opérationnels :

2/ Le diagramme T-s du TR après défaillance du quatrième moteur :



4/ La vitesse d'échappement :

Pour conserver la même force de poussée, la vitesse d'éjection doit être augmentée à u'_e

$$3F' = 4F \Rightarrow 3D'_a(u'_e - u_a) = 4D_a \cdot (u_e - u_a)$$ 1

$$D'_a = D_a.$$

Donc : $3u'_e = 4u_e - 4u_e + 3u_a \Rightarrow u'_e = \dfrac{4u_e - u_a}{3}$

$$u'_e = \frac{4 \cdot 1032 - 258{,}5}{3} \ m/s \Rightarrow \boxed{u'_e = 1290 \ \frac{m}{s}}$$

5/ La nouvelle température maximale :

$$\frac{T'_{04}}{T'_6} = \left(\frac{P_{03}}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (22{,}89)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} = 2{,}4460.$$

0,5

et : 0,5 $$W = c_p T'_{04} - c_p\left(T'_6 + \frac{u'^2_e}{2}\right) \Rightarrow T'_{04} - T'_6 = \frac{u'^2_e}{2c_p} + \frac{W}{c_p}.$$

$$W = c_p(T_{03} - T_{02}).$$

$$\frac{u'^2_e}{2c_p} + \frac{W}{c_p} = \frac{u'^2_e}{2c_p} + T_{03} - T_{02} = \left(\frac{1290^2}{2.1005} + 620 - 263,24\right)°C$$

$$= 1184,67\ °K.$$

$$\left.\begin{array}{l} T'_{04} = T'_6 + 1184.67\ °K \\ \text{et} \\ T'_{04} = T'_6 .2,446. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T'_{04} = 2004\ °K \quad (1) \\ T'_6 = 819\ °K. \quad (1) \end{array}$$

3/ Le rapport de mélange.

$$f = \frac{T'_{04} - T_{03}}{\frac{Q_R}{C_p} - T'_{04}} = \frac{2004 - 620}{\frac{42000.10^3}{1005} - 2004} = 0,0348.$$

$$\boxed{f = 0,0348.}$$ (1)