DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2022/2023
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Examen

On travaille toujours sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P\right)$ *sur lequel est défini un* $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$*-mouvement Brownien* $B = (B_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1. Soit $X_t = e^{B_t}$.

(1) Montrer que X_t n'est pas une martingale.
(2) Montrer que $e^{-t/2}X_t$ est une martingale.
(3) Trouver $Cov(X_s, X_t)$
- par un calcul direct,
- en utilisant la question 2.

Exercice 2. Soit $Y = \int_1^T \sqrt{t}dB_t$.

Montrer que Y est une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance $(T^2-1)/2$.

Exercice 3. Vérifier la formule

$$\int_0^t sB_s dB_s = \frac{t}{2}\left(B_t^2 - \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds.$$

Exercice 4. Montrer en utilisant la formule d'Itô que

(1) $\int_0^t \sin B_s dB_s = 1 - \cos B_t - \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s ds.$
(2) $\int_0^t e^{s/2}\cos B_s dB_s = e^{t/2}\sin B_t.$

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = t^2 dt + e^{t/2}\cos B_t dB_t, \qquad X_0 = 0$$

et trouver $E(X_t)$ et $Var\,(X_t)$.

Corrigé type : Examen de MB et CS (2022/2023)

Exercice 1 : $X_t = e^{B_t}$

① $E(X_t|\mathcal{F}_s) = E(e^{B_t}|\mathcal{F}_s) = E(e^{B_t - B_s} e^{B_s}|\mathcal{F}_s)$

$= e^{B_s} E(e^{B_t - B_s}|\mathcal{F}_s)$

$= e^{B_s} E(e^{B_t - B_s}) = e^{B_s} e^{t/2} e^{-s/2}$

② Ceci peut être écrit comme

$E(e^{-t/2} e^{B_t}|\mathcal{F}_s) = e^{-t/2} e^{B_s} e^{t/2} . e^{-s/2} = e^{-s/2} e^{B_s}$

$\Rightarrow e^{-t/2} e^{B_s}$ est une martingale.

③ ⓐ $Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s) E(X_t)$

$= E(X_s X_t) - e^{t/2} e^{s/2}$

$= E(e^{B_s + B_t}) - e^{t/2} . e^{s/2}$

$= E(e^{B_t - B_s} e^{2(B_s - B_0)}) - e^{t/2} . e^{s/2}$

$= E(e^{B_t - B_s}) E(e^{2(B_s - B_0)}) e^{t/2} . e^{s/2}$

$= e^{(t-s)/2} e^{2s} - e^{t/2} e^{s/2}$

$= e^{\frac{t+3s}{2}} - e^{(t+s)/2}$

ⓑ On a :

$E(X_s X_t) = E(E(X_s X_t|\mathcal{F}_s)) = E(X_s E(X_t|\mathcal{F}_s))$

$= e^{t/2} E(X_s E(e^{-t/2} X_t|\mathcal{F}_s)) = e^{t/2} E(X_s . e^{-s/2} . X_s)$

$= e^{(t-s)/2} E(X_s^2) = e^{(t-s)/2} E(e^{2B_s}) = e^{(t-s)/2} . e^{2s}$

$= e^{(t+3s)/2}$ on continue comme dans (a).

...rcice 2 $Y = \int_1^T \sqrt{t}\, dB_t$.

on a que $f(t) = \sqrt{t}$ est une fonction déterministe $t \in [1, T]$

et que $\int_1^T f^2(t)dt = \int_1^T (\sqrt{t})^2 dt = \int_1^T t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^T = (T^2-1)/2 < \infty$

$\Rightarrow f^2 \in L^2$.

Nous somme dans le cas de l'intégrale de Wiener.

$\Rightarrow Y$ est une v.a gaussiene (de loi normale)

et $E(Y) = 0$

et $\mathrm{var}\, Y = \int_1^T (f(t))^2 dt = \int_1^T t\,dt = (T^2-1)/2$.

Exercice 3 : Vérifions la formule

$$\int_0^t sB_s dB_s = \frac{t}{2}\left(B_t^2 - \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds$$

Considérons les processus $X_t = \int_0^t sB_s dB_s$, $Y_t = \frac{t}{2}\left(B_t^2 - \frac{t}{2}\right)$

et $Z_t = \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds$

On a : $dX_t = tB_t dB_t$

$dZ_t = \frac{1}{2} B_t^2 dt$.

Appliquant la formule d'Itô, on obtient

$dY_t = d\left(\frac{t}{2}\left(B_t^2 - t/2\right)\right) = \frac{1}{2}(tB_t^2) - d(t^2/4)$

(2)

$\frac{1}{2}\left((t+B_t^2)dt + 4\boxed{B_t}\, dB_t\right) - \frac{1}{2} t\, dt$

$= \frac{1}{2} B_t^2 dt + t B_t\, dB_t$.

on peut voir que $dX_t = dY_t - dZ_t$

$\Rightarrow d(X_t - Y_t + Z_t) = 0$ ie: $X_t - Y_t + Z_t = c$.

puisque $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0 \Rightarrow c = 0$

Ceci démontre le résultat désiré.

Exercice 4 : ① Soit $f(x) = \cos x$, $f \in \mathcal{C}^2$

calculons $f(B_t)$, Par la formule d'Itô

$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds$

$\Rightarrow \cos(B_t) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\cos(0)} - \int_0^t \sin B_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s\, ds$

$\Rightarrow \int_0^t \sin B_s\, dB_s = 1 - \cos B_t - \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s\, ds$

② Soit $g(t,x) = e^{t/2} \sin B_t$, $f \in \mathcal{C}^{1,2}$

Par la formule d'Itô

$f(t,B_t) = f(0,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, B_s)\right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s$

$\Rightarrow e^{t/2} \sin B_t = \int_0^t \left(\cancel{\frac{1}{2} e^{s/2} \sin B_s - \frac{1}{2} e^{s/2} \sin B_s}\right) ds + \int_0^t e^{s/2} \cos B_s\, dB_s$

$\Rightarrow \int_0^t e^{s/2} \cos B_s\, dB_s = e^{t/2} \sin B_t$.

...ice 8 l'EDS

$$dX_t = t^2 dt + e^{t/2} \cos B_s dB_s \quad , \quad X_0 = 0$$

$$X_t = \int_0^t s^2 ds + \int_0^t e^{s/2} \cos B_s \, dB_s = t^3/3 + e^{t/2} \sin B_t$$

(par ex 4)

Si X_t n'est pas gaussien on peut calculer son espérance et sa variance.
Puisque les intégrales d'Itô ont une espérance nulle.

$$E(X_t) = E\left(\int_0^t s^2 ds + \int_0^t e^{s/2} \cos B_s \, dB_s \right) = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}$$

Puisque la covariance de fonctions déterministes est nulle

$$Var(X_t) = Var\left(t^3/3 + e^{t/2} \sin B_t \right) = \left(e^{t/2}\right)^2 Var(\sin B_t).$$

$$= e^t E(\sin^2 B_t) = \frac{e^t}{2} \left(1 - E(\cos(2B_t))\right)$$

Pour calculer la dernière espérance on utilise la formule d'Itô.

$$d(\cos 2B_t) = -2 \sin(2B_t) dB_t - 2 \cos(2B_t) dt$$

en intégrant on trouve

$$\cos 2B_t = \cos 2B_0 - 2\int_0^t \sin 2B_s \, dB_s - 2\int_0^t \cos 2B_s \, ds$$

en prenant l'espérance et en utilisant le fait que les intégrales d'Itô ont une espérance nulle.

$$E(\cos 2B_t) = 1 - 2\int_0^t E(\cos 2B_s)\,ds$$

Si on désigne par $m(t) = E(\cos(2B_t))$ la relation précédente devient une équation intégrale

$$m(t) = 1 - 2\int_0^t m(s)\,ds.$$

En dérivant, on obtient

$$m'(t) = -2\,m(t)$$

$\Rightarrow m(t) = k\,e^{-2t}$ et puisque $k = m(0) = E(\cos 2B_0) = 1$

on a $\boxed{m(t) = e^{-2t}}$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X_t) = \frac{e^t}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \mathrm{sh}\, t$$

En conclusion, la solution X_t admet l'espérance et la variance données par

$$E(X_t) = t^3/3 \quad , \quad \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{sh}\, t.$$