Université Mohamed Khider-Biskra
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie
Département d'informatique

14 janvier 2024
M2
Logique pour l'IA

EXAMEN

Questions de cours :(5 pts)

Répondre par vrai ou faux à chacune des phrases suivantes, et fournir une justification lorsqu'une réponse est faux :

1. La négation d'une formule satisfiable est nécessairement satisfiable.
2. Étant donné une formule quelconque A de la logique des propositions, il existe une formule A' en FNC équivalente à A.
3. Étant donné une formule quelconque A de la logique des prédicats, il existe une formule A' en FNC équivalente à A.
4. Toute formule K-valide est nécessairement T-valide.
5. Toute formule S4-valide est nécessairement B-valide.
6. Une formule est prouvée valide en utilisant la méthode des arbres, si toute les branches de son arbre de vérité entièrement développé sont ouvertes.

Exercice 1 (5 pts)

Soit la conjecture du langage propositionnel suivante :

$\neg(q \wedge \neg r)$, $((p \to q) \vee (r \wedge \neg p)) \models \neg(r \to s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)$

1. Vérifier la validité de cette conséquence logique en utilisant la méthode des arbres.
2. Vérifier la validité de cette conséquence logique en utilisant la méthode de résolution.

Exercice 2 (4 pts)

1. Quel est la différence entre les cadres des systèmes S4 et S5 ?
2. Considérons la formule suivante dans le langage modal : $\Diamond(\Box p \vee q) \to \Box p \vee \Diamond q$.
   — Effectuez la vérification de la K-validité.
   — En cas de non-validité, fournissez un contre-exemple illustratif, puis proposer un système dans lequel cette formule devrais être valide.

Exercice 3 (6 pts)

1. Calculer, s'il existe, l'unificateur le plus général de chacune des paires d'atomes suivants :
   $A_1 = p(f(X,Y),Z)$ et $A'_1 = q(f(a,b),c)$
   $A_2 = p(f(X,Y),X)$ et $A'_2 = p(f(a,b),c)$
   $A_3 = p(f(g(X,Y)),g(V,W),Y)$ et $A'_3 = p(f(Z),X,f(X))$
2. Soit les formules suivantes :
   $A = \exists Y \forall X p(Y,X) \wedge \forall X \forall Y \forall Z [p(X,Y) \wedge p(Y,Z) \Rightarrow q(X,Y)]$
   $B = \forall X \exists Y q(X,Y)$
   Vérifier si B est une conséquence logique de A en utilisant la méthode de résolution.

★ Bonne réussite ★
Mme. A. MOHAMMEDI

CORRIGÉ TYPE

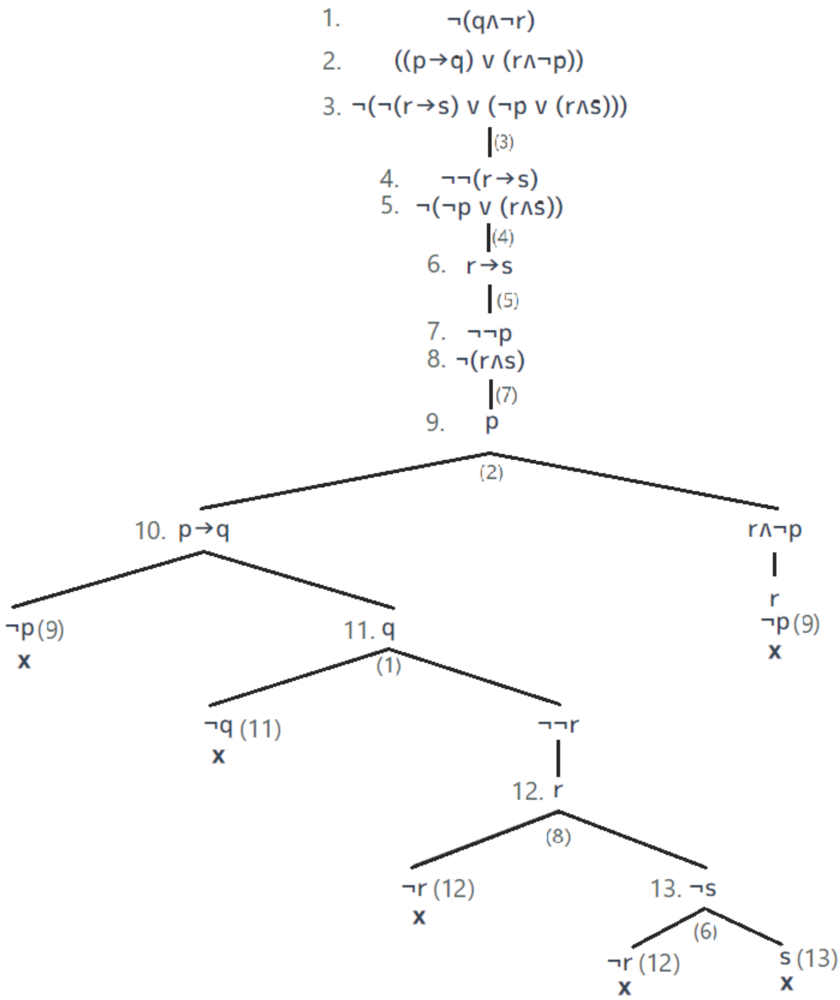
Questions de cours :(5 pts)

(0.5) pour Vrai/ (1) pour Faux avec sa justification.

1. Faux : Une formule valide est satisfiable mais sa négation n'est pas satisfiable.
2. Vrai.
3. Faux : à cause de la clôture universelle et de la skolémisation.
4. Vrai
5. Faux : B n'est pas un sous système de S4, car la transitivité, une propriété de S4, n'est pas vérifiée dans B.
6. Faux : Une formule est prouvée valide en utilisant la méthode des arbres si l'arbre de vérité de sa négation conduit à une contradiction dans toutes les branches.

Exercice 1 (5 pts)

1. Arbre de vérité : **(1.5)**



Preuve établie : Toutes les branches de l'arbre sont fermées donc la conséquence logique est valide.**(0,5)**

2. Méthode de résolution :
   Pour prouver la validité de la conséquence logique :
   A : $\neg(q \wedge \neg r)$, $((p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p)) \models \neg(r \rightarrow s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)$
   il suffit de prouver : $\{\neg(q \wedge \neg r) \text{ , } ((p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p))\} \cup \{\neg[\neg(r \rightarrow s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)]\} \models F$
   FNC : (1.5)
   - $\neg(q \wedge \neg r) \equiv (\neg q \vee r)$
   - $((p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p)) \equiv ((\neg p \vee q) \vee (r \wedge \neg p)) \equiv ((\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg p))$
     $\cancel{(\neg p \vee q \vee r)}$
     $(\neg p \vee q)$
   - $\neg[\neg(r \rightarrow s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)] \equiv [\neg\neg(\neg r \vee s) \wedge \neg\neg p \wedge \neg(r \wedge s)] \equiv (\neg r \vee s) \wedge p \wedge (\neg r \vee \neg s)$
     $(\neg r \vee s)$
     p
     $(\neg r \vee \neg s)$

   Résolution :(1)

   $C = \{c_1 : (\neg q \vee r), c_2 : (\neg p \vee q), c_3 : (\neg r \vee s), c_4 : p, c_5 : (\neg r \vee \neg s)\}$

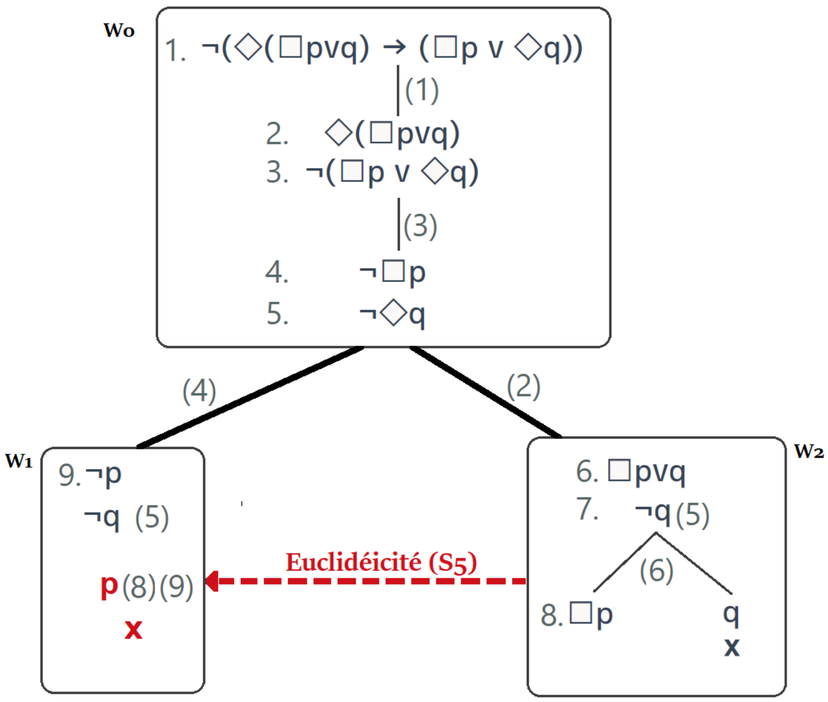
Prémisses	Résolvante
$c_4 c_2$	$q : c_6$
$c_1 c_6$	$r : c_7$
$c_7 c_4$	$\neg s : c_8$
$c_7 c_5$	$s : c_9$
$c_8 c_9$	F

   Conclusion :(0.5) La résolution a abouti à une clause vide,
   ce qui signifie que l'ensemble $\{\neg(q \wedge \neg r) \text{ , } ((p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p))\} \cup \{\neg[\neg(r \rightarrow s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)]\}$ est inconsistant ;
   Par conséquent, la conséquence logique **A** est valide.

Exercice 2 (4 pts)

1. S5 est une extension de S4 qui inclut toutes les propriétés de S4 (réflexivité, transitivité) et ajoute la symétrie. **(1)**

2. Arbre de vérité : **(1)**



3. La seule branche reste ouverte car les deux mondes restent ouverts, ce qui indique que la formule n'est pas K-valide.

Un contre exemple est le suivant **(1)** : Soit la structure de Kripke $\mathscr{M} =< W,R,V >$, sur $P = \{p,q\}$,
$W = \{w_0, w_1, w_2\}$
$R = \{(w_0, w_1), (w_0, w_2)\}$
$V(p) = \varnothing, \quad V(q) = \varnothing$

4. La formule est S5 valide grace à la relation d'euclidéicité (illustré sur l'arbre de vérité). **(1)**

Exercice 3 (6 pts)

1. Calculer s'il existe un unificateur général des deux atomes suivants :
   - Unification impossible, à cause des symboles de prédicats différents. **(0.5)**
   - Unification impossible, à cause de symboles de fonctions différents. **(1)**
   - $mgu_{A_3,A'_3} = \{X/g(V,W), Y/f(g(V,W)), Z/g(g(V,W), f(g(V,W)))\}$ **(1)**
2. Soit les formules suivantes :
   $A = \exists Y \forall X p(Y,X) \wedge \forall X \forall Y \forall Z[p(X,Y) \wedge p(Y,Z) \rightarrow q(X,Y)]$
   $B = \forall X \exists Y q(Y,X)$ Pour vérifier si B est une conséquence logique de A.
   Il faut vérifier si $C_A \cup C_{\neg B}$ est inconsistant. **(0.5)**
   FNC : (1)
   (a) Clôture universelle : déjà close.
   (b) Elimination de $\Rightarrow$:
   $A' = \exists Y \forall X p(Y,X)$
   $A'' = \forall X \forall Y \forall Z[\neg p(X,Y) \vee \neg p(Y,Z) \vee q(X,Y)]$
   (c) Réduction de la portée de la négation :déjà réduite.
   (d) Forme propre : déjà propre.
   (e) Forme prénexe : déjà prénexe.
   (f) Skolémisation : $\forall X p(a,X)$ où a est une constante.
   $\forall U \forall V \forall Z[(\neg p(U,V) \vee \neg p(V,Z) \vee q(U,V))]$
   (g) Elimination des quantificateurs :
   $p(a,X)$
   $(\neg p(U,V) \vee \neg p(V,Z) \vee q(U,V))$
   $\neg q(Y,b)$
   (h) Forme clausale :
   $C_A = \{p(a,X), \neg p(U,V) \vee \neg p(V,Z) \vee q(U,V)\}$
   et de la même manière : $\neg B = \neg \forall X \exists Y q(X,Y)$
   $\neg B = \exists X \forall Y \neg q(X,Y)$
   $\neg B = \forall Y \neg q(b,Y)$ où b est une nouvelle constante.
   $C_{\neg B} = \{\neg q(b,Y)\}$ **(0.5)**
   Appliquer la résolution sur l'ensemble $C_A \cup C_{\neg B}$
   $\{c_1 : p(a,X), c_2 : \neg p(U,V) \vee \neg p(V,Z) \vee q(U,V), c_3 : \neg q(b,Y)\}$

(1)

Prémisses	Résolvante	UMG	Règle
c_2	$\neg p(Z,Z) \vee q(Z,Z) : c_4$	$\sigma = \{V/Z, U/Z\}$	FAC
c_1c_4	$q(a,a) : c_5$	$\sigma = \{Z/a, X/a\}$	RES
c_3c_5	X	Unification impossible	
c_3c_4	$\neg p(b,b) : c_5$	$\sigma = \{Y/b, Z/b\}$	RES
c_1c_5	X	Unification impossible	

ou

Prémisses	Résolvante	UMG	Règle
c_3c_2	$\neg p(b,V) \vee \neg p(V,Z) : c_4$	$\sigma = \{U/b, Y/V\}$	RES
c_1c_4	$\neg p(b,a) : c_5$	$\sigma = \{V/a, X/Z\}$	RES
c_1c_5	X	Unification impossible	

Impossible d'aboutir à une clause vide, donc on ne peut pas dire que l'ensemble $C_A \cup C_{\neg B}$ est inconsistant. Par conséquent, on ne peut pas conclure que B est une conséquence logique de A. **(0.5)**

★ Bonne réussite ★

Mme. A. MOHAMMEDI