

Nom & prénom :	Université Mohammed Khider Faculté des Sciences et de la Technologie Département de Génie électrique
Note : /10	

Biskra le 14/01/2024

Corrigé EMD « Ondes et propagation » (durée 1h 30mn)

Exercice 1 : (3 points)

Dans un milieu (ϵ, μ, σ) , il existe la distribution de charge électrique $\rho = \rho_0 e^{j\omega t}$ et une induction électrique $\vec{D}$. Ecrire l'équation de conservation de l'électricité $\text{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ en fonction de ρ et des composantes de $\vec{D}$ en coordonnées cartésiennes.

Réponse

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{\vec{D}}{\epsilon} \quad (1 \text{ pt})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot \rho_0 e^{j\omega t} = j\omega \rho \quad (1 \text{ pt})$$

$$\text{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \text{div}(\vec{D}) + j\omega \rho = 0$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + j\omega \rho = 0 \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 2 : (2 points)

En utilisant l'identité $\vec{\Delta} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}))$, démontrez l'expression de l'équation de propagation suivante : $\vec{\Delta} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. Le milieu de propagation est le vide.

Réponse

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\text{div}(\vec{D}) = 0 \text{ d'où } \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = 0 \text{ et } \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\text{Il en résulte que : } \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(0) = 0 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}))$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0 \vec{H})}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Exercice 3 : (3 points)

On définit la relation de dispersion $\omega(\beta)$ par : $\omega^2(\beta) = a^2\beta^2 + \omega_0^2$

En déduire la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g .

Réponse

$$\omega^2(\beta) = a^2\beta^2 + \omega_0^2$$

$$\omega(\beta) = \sqrt{a^2\beta^2 + \omega_0^2} \quad (1 \text{ pt})$$

$$v_\phi = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = \frac{\sqrt{a^2\beta^2 + \omega_0^2}}{\beta} \quad (1 \text{ pt})$$

$$v_g = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta} = \frac{a^2\beta}{\sqrt{a^2\beta^2 + \omega_0^2}} \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 4 : (2 points)

Donnez les expressions des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$ d'une onde plane, sinusoïdale, se propageant dans le vide suivant la direction Ox , ayant comme plan de polarisation Oxz et de fréquence $f = 1\text{MHz}$.

Calculez ω et β

Réponse

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(\omega t - \beta x) \vec{u}_z \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\vec{H}(x,t) = H_0 \sin(\omega t - \beta x) \vec{u}_y \quad (0.5 \text{ pt})$$

avec :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 10^6 = 6.28 * 10^6 = 6280000 \text{ rad/s} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{c}{f}} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi * 10^6}{3 * 10^8} = 0.0209 \text{ rad/m} \quad (0.5 \text{ pt})$$

300