Université Mohammed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option: Stat & Proba
2023/2024

EMD 1

Exercice 1 ***(./05 points)*** Soit X une variable aléatoire ayant comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx^4, & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec k est une constante réelle.

1. Donner la fonction de réparation associée à f.
2. Proposé un algorithme, qui nous permet de générer un échantillon de taille n de même loi que X.

Exercice 2 ***(./07 points)*** Soit la fonction $f(x) = 1 - x^2$.

1. Vérifier ce qui suit:

$$\text{si } x \in [-1,1] \Rightarrow f(x) \geq 0 \;\text{ et si } x \notin [-1,1] \Rightarrow f(x) < 0.$$

2. Déterminer le maximum et le minimum de f dans l'intervalle $[-2, 2]$.
3. Proposer un simulateur qui nous permet de calculer la surface délimiter par la courbe de f, l'axe des abscisses $(x'x)$ et les deux droites verticales $x = -2$ et $x = 2$.
4. Proposer un algorithme de simulation qui nous permet de calculer l'intégrale $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx$

Exercice 3 ***(./05pts)*** Soit X une variable aléatoire qui représente la note d'étudiant de master 1 option probabilités et statistiques dans le module Modélisation est simulation. Notons que la note X dépond du type d'examen effectué (examen ordinaire ou examen remplacement) où elle est décrite comme suite :

Examen ordinaire: X suit une loi normale tronquée sur [5,20] de moyenne μ_1 et d'écart-type σ_1.

Examen remplacement : X suit une loi normale tronquée sur [0,5] de moyenne μ_2 et d'écart-type σ_2.

Question: Si on sait que la probabilité d'absence d'un étudiant est égale p, alors proposer un simulateur qui nous permet d'estimer la moyenne et la variance de la note de cet étudiant.

Exercice 4 ***(./03pts)*** On désire estimer à l'aide de la simulation les caractéristiques de la variable aléatoire N définie comme suite :

$$N = \inf_{k \geq 1} \{X_1 + X_2 + ... + X_k \geq M\},$$

où M est une constante donnée et les $X_1,\ X_2, ...$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Proposer un simulateur qui nous permet de générer une seule variable de même loi que N.
2. Proposer un simulateur qui nous permet d'estimer la moyenne et la variance de la variable N.

Université Mohammed Khider de Biskra
Département Mathématiques
Module: Modélisation et Simulation

Première Année Master
Option: Stat & Proba
2023/2024

Corrigé de l'EMD 1

Solution de l'Exercice 1 *(05 points)*

1. Nous devant d'abord déterminer la valeurs de la constante k, le fait que f est une densité alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} kx^4 dx = 1 \Rightarrow \left.\frac{k}{5}x^5\right|_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow \frac{2k}{5} = 1 \Rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

2. Par définition on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1; \\ \frac{1}{2}\left(x^5 + 1\right), & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. Pour concevoir un simulateur qui peut générer un échantillon de taille n de même loi que X on peut faire recours à la méthode d'inversion. soit u une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$u = F(x) \Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(x^5 + 1\right) \Rightarrow x^5 = 2u - 1 \Rightarrow x = \begin{cases} +\sqrt[5]{2u-1}, & \text{si } u \geq \frac{1}{2}; \\ -\sqrt[5]{1-2u}, & \text{si } u < \frac{1}{2}. \end{cases} .$$

Ainsi l'algorithme de notre simulateur peut être comme suit:

```
function [X]=Exercice1(n)
for i=1:n
    u=random('unif',0,1);
    if (u <.5)
        X(i)=-(1-2*u)^(1/5);
    else
         X(i)=(2*u-1)^(1/5);
    end
end
end
```

Solution de l'Exercice 2

1. On a $f(x) = 1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, f(x) est un polynôme d'ordre deux dont les racines sont -1 et +1, alors

x		-1		+1	
$f(x)$	-	0	+	0	-

2. on a

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, & si\ x \in [-2, 0[; \\ f'(x) = 0, & si\ x = 0; \\ f'(x) < 0, & si\ x \in]0, 2]. \end{cases}$$

On peut déduire alors, que

$$\begin{aligned} &\min(f(x)) = \min\{f(-2), f(2)\} = \min -3, -3 = -3 \\ &\max(f(x)) = f(0) = 1 \\ &\max(|f(x)|) = \max\{|\min(f(x))|, |\max(f(x))|\} = max 3, 1 = 3. \end{aligned}$$

Pour estimer la surface en question nous proposons d'utiliser la méthode de rejet (Monté Carlo). Mais nous constatons que f change de signe dans $[-2; 2]$, à cet effet nous proposons d'utiliser $|f(x)|$ plutôt que $f(x)$ elle-même (voir figure 1). Pour générer un point, notons que:

- $x \in [-2; 2]$ de ce fait il suffit de génère des x selon une loi uniforme sur $[-2; 2]$.
- $|f(x)| \in [|\min(f(x))|; \max(|f(x)|)] = [0; 3]$ de ce fait il suffit de génère des y selon une loi uniforme sur $[0; 3]$.
- La surface du rectangle délimité par $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = 3$ est $S = (2-(-2))*(3-0) = 12$;
- La surface recherchée est $s = S * Nbr/n$ où Nbr est le nombre de point à l'intérieur de la surface recherché, n est le nombre de point généré et S est la surface du rectangle précédent.

Le simulateur de s est présenter dans la figure 2

3. Calcul d'intégrale. Le fait que la fonction f change de signe dans $[-2; 2]$ (négative sur $[-2; -1]$, positive sur $[-1; 1]$ et négative sur $[1, 2]$, voir figure 1), pour estimé I par simulation nous allons décomposé l'intégrale I en trois intégrales I_1 et I_2, I_3 où $I_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)dx$, $I_2 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ et $I_3 = \int_{1}^{2} f(x)dx$. Ainsi de la même approche et la même analyse que dans la première question, l'algorithme suivant peut donner une estimation pour $I = -I_1 + I_2 - I_3$ (voir figure 2).

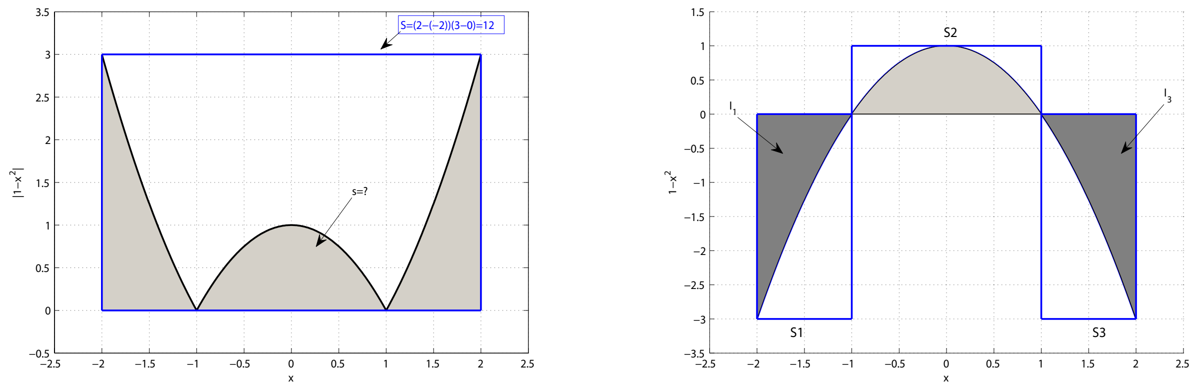

Figure 1: Illustration graphique de calcul d'intégrale de l'exercice 2.

```
function [s,I]=Exercice2(n)
%Calcul de surface
nbr=0;
for i=1:n
    xi=random('unif',-2,2);
    yi=random('unif',0,3);
    if (yi <abs(1-xi^2))
        nbr=nbr+1;
    end
end
s=(nbr/n)*12;

%calcul d'integrale
nbr1=0;
nbr2=0;
nbr3=0;
for i=1:n
    xi=random('unif',-2,-1);
    yi=random('unif',0,3);
    if (yi <abs(1-xi^2))
        nbr1=nbr1+1;
    end
    xi=random('unif',-1,1);
    yi=random('unif',0,1);
    if (yi <(1-xi^2))
        nbr2=nbr2+1;
    end
    xi=random('unif',1,2);
    yi=random('unif',0,3);
    if (yi <abs(1-xi^2))
        nbr3=nbr3+1;
    end
end
I1=(nbr/n)*3;
I2=(nbr/n)*2;
I3=(nbr/n)*3;
I=I2-I1-I3;
end
```

Figure 2: Programme Matlab de l'exercice 2

Solution de l'Exercice 3 L'analyse du problème exposé dans l'exercice donne issue à l'algorithme suivant:

```
function [Xbar,Xvar,X]=Exercice3(n,p,mu1,mu2,sigma1,sigma2)
for i=1:n
    u=random('unif',0,1);
    if u<(1-p)
        y=random('norm',mu1,sigma1);
        while or((y<5),(y>20)) % La notes doit être dans [5,20]
            y=random('norm',mu1,sigma1);
        end
        X(i)=y;
    else  % L'étudiant est absent dans l'examen normal et il
              dois effectué l'examen  de remplacement)
         y=random('norm',mu2,sigma2);
        while or((y<0),(y>5)) % La notes doit être dans [0,5]
            y=random('norm',mu2,sigma2);
        end
        X(i)=y;
    end
end
Xbar=mean(X);
Xvar=var(X);
```

Solution de l'Exercice 4 L'analyse du problème exposé dans l'exercice donne issue à l'algorithme suivant:

```
function [N,Nbar]=Exercice4(n,lambda,M)
%Programme de la question N°2
for i=1:n
     N(i)=simulN(lambda,M);
end
Nbar=mean(N);

end

%Programme de la question N°1
function N=simulN(lambda,M)
s=0;
    N=0;
    while s<=M
        N=N+1;
        y=random('poiss',lambda);
        s=s+y;
    end
end
```

Examen de rattrapage

Exercise 1 ***(/5pts):*** Soit f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = e^{-2x} + 2e^{-4x}$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de cette densité.
3. Vérifier que f est une combinaison linéaire de deux densités exponentielle.
4. Proposer un algorithme qui nous permet de générer d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire issue de f.

Exercise 2 ***(/5pts):*** Soit la fonction $f(x) = \sin(2x)$

1. Proposé un simulateur qui nous permet d'estimer la valeur de $I = \int_{\frac{-\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$
2. Proposé un simulateur qui nous permet d'estimer la valeur de la surface délimité par la courbe de f, l'axe des abscisse, la droite $x = \frac{-\pi}{12}$ et la droite $x = \frac{\pi}{8}$.

Exercise 3 ***(/10pts):*** Une particule se trouve à l'instant $t = 0$ au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). Figure explicative à chaque instant, elle fait un bond de +1 avec la probabilité p ($0 < p < 1$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant t_n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. Écrire une fonction Marche(a, N, p) qui simule cette marche aléatoire et qui:
   (a) retourne l' endroit où la particule sort du segment (0 ou N).
   (b) Le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête
2. On note p_a (respectivement p_N) la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0 (respectivement en N). Proposer une fonction qui fournit une estimation de p_a, p_N ainsi que le nombre de pas moyen nécessaire pour chacune des deux sorties.