Departement de Mathematiques
Universite de Biskra
Module

$2^{ème}$ Année Master Maths
S3, Année 2024/2025
Mouvement Brownien et calcul stochastique

EXAMEN

Nous travaillons toujours sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ sur lequel est défini un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1.

(1) Calculer $E[B_s B_t^2]$, $E[B_t|F_s]$, $E[B_t|B_s]$, pour $s < t$.
(2) Calculer $E[B_s^2 B_t^2]$, pour $s < t$.
(3) Quelle est la loi de $B_t + B_s$? Quelle est la loi de $\int_0^1 B_s ds$?

Exercice 2.

Indiquer lesquelles des intégrales d'Itô suivantes existe, et calculer son expérance et sa variance.

(1) $\displaystyle\int_0^T sign(B_t)dB_t$.
(2) $\displaystyle\int_0^T \sin(B_{t+1})dB_t$.

Exercice 3.

Montrer que

$$M_t = e^{t/2}\sin(B_t).$$

est une martingale en utilisant la formule d'Itô.

Exercice 4.

Considérons le processus stochastique décrit par l'équation différentielle stochastique d'Itô:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{t}{2}X_t dt + \sqrt{t}X_t dB_t \\ X_0 &= 1 \end{aligned}$$

(1) Résoudre cette équation en posant $Y_t = f(X_t) = \ln(X_t)$.
(2) Calculer la covariance du processus $(X_t)_{t\geq 0}$.

Barème :

Ex1 : 8 pts
(1) 1,5 + 1,5 + 1
(2) 1,5
(3) 1,5 + 1

Ex2 : 4 pts
(1) 2
(2) 2

Ex3 : 4 pts
4.

Ex4 : 8 pts
(1) 6
(2) 2

Corrigé type de l'examen
"Mouvement Brownien et Calcul stochastique"

Exercice 1 :

① Calcul de $E[B_s B_t^2]$, $s<t$

$E[B_s B_t^2] = E\left[B_s \left((B_t - B_s + B_s)^2\right)\right] = E\left[B_s \left((B_t-B_s)^2 + 2B_s(B_t-B_s) + B_s^2\right)\right]$

$= E\left[B_s (B_t-B_s)^2 + 2B_s^2(B_t-B_s) + B_s^3\right]$ linéarité de E

$= E\left[B_s (B_t-B_s)^2\right] + 2E\left[B_s^2 (B_t-B_s)\right] + E(B_s^3)$

$= E[B_s]\,E\left[(B_t-B_s)^2\right] + 2E[B_s^2]\,E[(B_t-B_s)] + E(B_s^3)$

puisque B_s et $B_t - B_s$ sont indépendants

$= 0 \times (t-s) + 2s \times 0 + 0 = 0$ puisque $E(B_s^3) = 0$

$\Rightarrow E[B_s B_t^2] = 0$.

Calcul de $E[B_t | \mathcal{F}_s]$, $s<t$.

Par la propriété martingale du mouvement Brownien

$E[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s$

Calcul de $E(B_t | B_s)$, $s<t$

$E[B_t | B_s] = E[B_s + (B_t - B_s) | B_s] = E[B_s | B_s] + E[(B_t - B_s) | B_s]$

$= B_s + E[B_t - B_s] = B_s + 0 = B_s$

$\Rightarrow E[B_t | B_s] = B_s$.

puisque B_s et $B_t - B_s$ sont indépendant et $E(B_t - B_s) = 0$.

② Calcul de $E[B_s^2 B_t^2]$, $s<t$

$E[B_s^2B_t^2] = E[B_s^2(B_s+(B_t-B_s))^2] = E[B_s^2(B_s^2+2B_s(B_t-B_s)+(B_t-B_s)^2)]$

$= E[B_s^4 + 2B_s^3(B_t-B_s) + B_s^2(B_t-B_s)^2]$

$= E[B_s^4] + 2E[B_s^3(B_t-B_s)] + E[B_s^2(B_t-B_s)^2]$

$= E[B_s^4] + 2E[B_s^3]E(B_t-B_s) + E[B_s^2]E[(B_t-B_s)^2]$

puisque B_s et B_t-B_s sont indépendants et $E(B_s^3)=0$

et $E[B_s^4]=3s^2$

$= 3s^2 + 2\times 0 + s(t-s) = 3s^2+s(t-s) = 2s^2+st$.

$\Rightarrow E[B_s^2B_t^2] = 2s^2+st$.

③ loi de B_t+B_s, $s<t$

pour $s<t$, $B_t+B_s = B_t+B_s-B_s+B_s = 2B_s+(B_t-B_s)$

puisque $B_s \sim N(0,s)$ et $(B_t-B_s)\sim N(0,t-s)$, et ils sont indépendants

$\Rightarrow B_t+B_s \sim N(0, 4s+(t-s)) = N(0,t+3s)$.

ou (autre méthode)

B_t+B_s une combinaison de v.a gaussiennes

$\Rightarrow B_t+B_s$ suit une loi gaussienne d'espérance

$E(B_t+B_s) = E(B_t)+E(B_s) = 0$

sa variance

$Var(B_t+B_s) = Var(B_t)+Var(B_s)+2Cov(B_t,B_s)$

$= t+s+2\min(s,t) = t+s+2s = t+3s$

$\Rightarrow B_t+B_s \sim N(0,t+3s)$. ②

Loi de $\int_0^1 B_s ds$, $s<t$.

L'intégrale $\int_0^1 B_s ds$ est une v.a. gaussienne d'espérance

$$E\left[\int_0^1 B_s ds\right] = \int_0^1 E[B_s]\, ds = 0$$

et de variance.

$$Var\left[\int_0^1 B_s ds\right] = \int_0^1\int_0^1 E[B_u B_v]\, du\, dv = \int_0^1\int_0^1 \min(u,v)\, du\, dv$$

Calculons l'intégrale double

$$\int_0^1\int_0^1 \min(u,v)\, du\, dv = \int_0^1\left(\int_0^v u\, du + \int_v^1 v\, du\right) dv$$

$$= \int_0^1\left(\frac{v^2}{2} + v(1-v)\right) dv = \int_0^1\left(\frac{v^2}{2} + v - v^2\right) dv$$

$$= \int_0^1\left(v - \frac{v^2}{2}\right) dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 1/3$$

$$\Rightarrow \int_0^1 B_s ds \sim N(0, 1/3).$$

Exercice 2

ⓐ $\int_0^T \mathrm{sign}(B_t)\, dB_t$ où $\mathrm{sign}\, x = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$\mathrm{sign}(B_t)$ est un processus adapté à la filtration du M.B. B et

$$E\left(\int_0^T (\mathrm{sign}(B_t))^2 dt\right) = E\int_0^T 1\, dt = T < \infty$$

$$\Rightarrow \mathrm{sign}(B_t) \in L^2_{a,T}$$

$\Rightarrow \int_0^T \mathrm{sign}(B_t)\,dB_t$ existe et est une martingale d'espérance nulle

$$E\left[\int_0^T \mathrm{sign}(B_t)\,dt\right] = 0$$

et de variance (par l'isométrie d'Itô)

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T \mathrm{sign}(B_t)\,dB_t\right) = E\left[\int_0^T (\mathrm{sign}(B_t))^2\,dt\right] = E\left[\int_0^T 1\,dt\right] = T$$

ⓑ $\int_0^T \sin(B_{t+1})\,dB_t$.

B_{t+1} n'est pas adapté à la filtration du mouvement Brownien $B \Rightarrow$ l'intégrale n'existe pas au sens d'Itô

Exercice 3 : $M_t = e^{t/2}\sin(B_t)$

$M_t = f(t, B_t) = e^{t/2}\sin(B_t)$, avec $f(t,x) = e^{t/2}\sin x$.

$f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}e^{t/2}\sin x$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{t/2}\cos x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -e^{t/2}\sin x$.

d'après la formule d'Itô

$$M_t = f(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\right)ds$$

$$= 0 + \int_0^t e^{s/2}\cos B_s\,dB_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2}e^{s/2}\sin(B_s) - \frac{1}{2}e^{s/2}\sin(B_s)\right)ds$$

$$= \int_0^t e^{s/2}\cos B_s\,dB_s.$$

$e^{t/2}\cos(B_t) \in L^2_{a,T}$ car

$$E\int_0^t \left(e^{s/2}\cos B_s\right)^2 ds \leq E\left[\int_0^t e^s ds\right] \leq e^t < \infty \quad \forall t < +\infty$$

$\Rightarrow$ d'après les propriétés de l'intégrale stochastique d'Itô M_t est une martingale.

Exercice 4 : $dX_t = \frac{t}{2} X_t\, dt + \sqrt{t}\, X_t\, dB_t$.

$X_0 = 1$.

(1) posant $Y = f(X_t) = \ln(X_t)$, en supposant que $X_t > 0$ $\forall t \geq 0$

avec $f(x) = \ln x$, $f \in C^2(\mathbb{R})$

et $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

on a d'après la formule d'Itô :

$$dY_t = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\,(dX_t)^2$$

$$= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}(dX_t)^2 = \frac{1}{\cancel{X_t}}\left(\frac{t}{2}\cancel{X_t}\,dt + \sqrt{t}\,\cancel{X_t}\, dB_t\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{X_t^2}}\, t\, \cancel{X_t^2}\, dt$$

$$= \cancel{\frac{t}{2} dt} + \sqrt{t}\, dB_t - \cancel{\frac{1}{2} t\, dt} = \sqrt{t}\, dB_t,$$

$Y_0 = f(X_0) = \ln(1) = 0$

on obtient $Y_t = \int_0^t \sqrt{s}\, dB_s$. On a que $X_t = \exp(Y_t)$

$$\Rightarrow X_t = \exp\left(\int_0^t \sqrt{s}\, dB_s\right).$$

(2) de l'EDS on a

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{s}{2} X_s\,ds + \int_0^t \sqrt{s}\, X_s\, dB_s$$

$$\Rightarrow E[X_t] = 1 + E\left[\int_0^t \frac{s}{2} X_s\,ds\right] + E\left[\int_0^t \sqrt{s}\, X_s\, dB_s\right]$$

si $\mu_X(t) = E[X_t] \Rightarrow \mu$ satisfait le pb de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu_X(t) = \frac{t}{2}\mu_X(t) \\ \mu_X(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_X(t) = e^{\int_0^t \frac{s}{2} ds} = e^{t^2/4}.$$

ou (Autre méthode)

$$E(X_t) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t s\,ds\right) = \exp\left(t^2/4\right) \qquad \left(\int_0^t s\,ds = t^2/2\right)$$

si $s<t$, calculons $E(X_t X_s)$:

$$X_t = \exp\left(\int_0^t \sqrt{u}\,dB_u\right) = \exp\left(\int_0^s \sqrt{u}\,dB_u + \int_s^t \sqrt{u}\,dB_u\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^s \sqrt{u}\,dB_u\right)\exp\left(\int_s^t \sqrt{u}\,dB_u\right) = X_s \exp\left(\int_s^t \sqrt{u}\,dB_u\right)$$

$$\Rightarrow E(X_t X_s) = E(X_s^2)\, E\left(\exp\left(\int_s^t \sqrt{u}\,dB_u\right)\right)$$

on a $E(X_s^2) = \exp\left(\int_0^2 2u\,du\right) = \exp(s^2)$

et $E\left(\exp\left(\int_s^t \sqrt{u}\,dB_u\right)\right) = \exp\left(1/2 \int_s^t u\,du\right) = \exp\left(\frac{t^2-s^2}{4}\right)$

$$\Rightarrow E(X_t X_s) = \exp(s^2)\cdot\exp\left(\frac{t^2-s^2}{4}\right) = \exp\left(s^2 + \frac{t^2-s^2}{4}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{3s^2+t^2}{4}\right)$$

Calcul de la covariance

$$\operatorname{Cov}(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)$$

$$= \exp\left(\frac{3s^2+t^2}{4}\right) - \exp\left(t^2/4\right)\exp\left(\frac{s}{4}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{3s^2+t^2}{4}\right) - \exp\left(\frac{t^2+s^2}{4}\right)$$

si $s=t$

$$\operatorname{Var}(X_t) = \exp(t^2) - \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$
