Université de Mohamed Khider Biskra
Département de Mathématiques
Première année master maths 2023/24

Examen final d'analyse convexe

Exercice 1 : Parmi les ensembles suivants, lesquels sont convexes ?

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x\}$

3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 5\}$

4) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4,\ y \geq 2\}$

Exercice 2 : Montrer que l'enveloppe convexe de l'ensemble $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{1+x^2}\right\}$ est le demi plan $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

Exercice 3 : Soit C un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

a- Soient $x \in ri(C)$ et $y \in \overline{C}$, montrer que $\forall \lambda \in (0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda) y \in ri(C)$.

b- Montrer que $ri(C) = ri\left(\overline{C}\right)$.

Exercice 4 : Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction.

a- Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall p \geq 2, \forall x_1, ..., x_p \in C, \forall \lambda_1, ..., \lambda_p \in [0, 1] \text{ tels que } \textstyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \text{ on a}$$
$$f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\ f(x_k).$$

b- Montrer que la fonction $\frac{1}{1+e^x}$ est convexe sur $[0, +\infty)$ puis déduire l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_k} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}$$

où $x_1, ..., x_n \geq 1$.

Bon courage