Université Mohamed Khider-Biskra — 23 mai 2024
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie — M1
Département d'informatique — Logique pour l'IA

EXAMEN

Questions de cours (5 points)

Répondez par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant les réponses fausses :

1. Une formule est valide si et seulement si sa négation est non-valide.
2. Toute formule de la logique des propositions peut être transformée en forme normale conjonctive (FNC).
3. La méthode des arbres ne nécessite aucune forme particulière des formules pour être appliquée.
4. Dans la méthode des arbres, une formule est non-satisfiable si et seulement si toute les branches de l'arbre de sa négation sont ouvertes.
5. Toute formule valide dans le système S4 est également valide dans le système T.
6. La logique propositionnelle est inclue dans logique modale.
7. Les structures de Kripke peuvent être utilisées pour définir la sémantique des formules modales.
8. La logique floue est une logique modale.

Exercice 1 (5 points)
Considérons la conjecture suivante en logique propositionnelle :

$$(p \vee \neg q), (\neg p \vee q) \models (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$$

1. Vérifiez la validité de cette conjecture en utilisant la méthode de résolution.
2. Vérifiez la validité de cette conjecture en utilisant la méthode des arbres.

Exercice 2 (4 points)

1. Expliquer via un schéma, la relation entre les systèmes de la logique modale (vus dans le cours).
2. Considérez la formule suivante en logique modale :

$$\Diamond(p \wedge \Box q) \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q).$$

— Vérifiez si cette formule est valide dans le système K. Sinon donnez un contre exemple.
— Proposez le système le plus général dans lequel cette formule serait valide.

Exercice 3 (4 points)
Vérifier en utilisant la résolution, la validité de la formule suivante :

$$\forall X(p(X) \rightarrow q(X)) \wedge \forall X(q(X) \rightarrow r(X)) \rightarrow \forall X(p(X) \rightarrow r(X))$$

Exercice 4 (2 points)

Exprimez en logique temporelle les propriétés suivantes :

1. La propriété p est stable (si elle arrive, elle demeure présente).
   The property p is stable (if it occurs, it remains present).
2. si p arrive, alors q doit arriver dans les trois prochains états.
   If p occurs, then q must occur within the next three states.

3. Toute demande est acquittée plus tard et aucune demande supplémentaire n'arrive avant l'acquittement.
   Every request is acknowledged later, and no additional requests arrive before the acknowledgment.
4. q se produit toujours entre une paire d'occurrence de p, et à chaque fois que p se produit, q doit se produire au moins une fois avant la prochaine occurrence de p.
   q always occurs between a pair of occurrences of p, and each time p occurs, q must occur at least once before the next occurrence of p.

★ Bonne réussite ★
Mme. A. MOHAMMEDI

CORRIGE EXAMEN

Questions de cours (5 points)

Répondez par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant les réponses fausses :
(vrai = 0.5 / faux = 0.25 + 0.5)

1. Faux : Une formule est valide si et seulement si sa négation est inconsistante.
2. Vrai.
3. Vrai.
4. Faux : Dans la méthode des arbres, une formule est non-satisfiable si et seulement si toute les branches de son arbre sont fermées.
5. Faux : L'inverse est correct. Toute formule valide dans le système T est également valide dans le système S4.
6. Vrai.
7. Vrai.
8. Faux : La logique floue est une logique multi-valuée.

Exercice 1 (5 points)
Considérons la conjecture suivante en logique propositionnelle :

$$(p \vee \neg q), (\neg p \vee q) \models (p \to q) \wedge (\neg q \to \neg p)$$

On pose $E = \{(p \vee \neg q), (\neg p \vee q)\}$ et $C = (p \to q) \wedge (\neg q \to \neg p)$

1. Méthode de résolution :
   Pour démontrer la conséquence logique, on démontre que $E \cup \{\neg C\} \models F$ **(0.25)**
   FNC :
   $(p \vee \neg q) : c_1$ **(0.25)**
   $(\neg p \vee q) : c_2$ **(0.25)**
   (0.5)

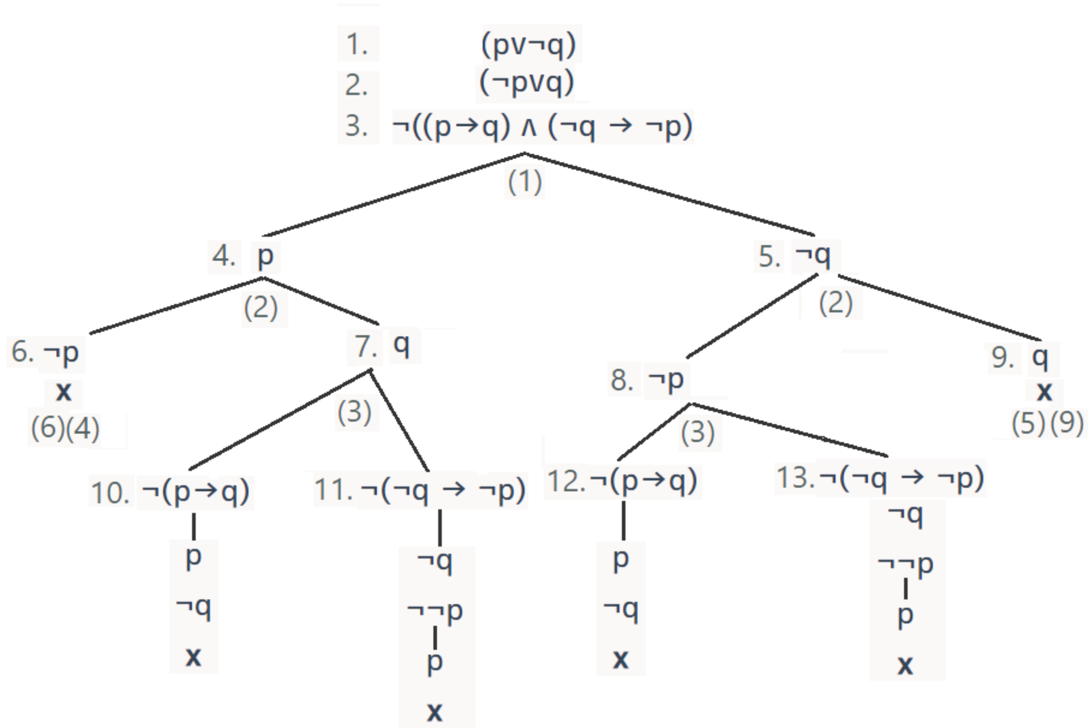
$$\begin{aligned}
\neg\left[(p \to q) \wedge (\neg q \to \neg p)\right] &\equiv \neg\left[(\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg q \vee \neg p)\right] \\
&\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(q \vee \neg p) \\
&\equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg\neg p) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \\
&\equiv p \wedge \neg q
\end{aligned}$$

   $p : c_3$
   $\neg q : c_4$

   Résolution : **(0.5)**
   $c_2 c_3$ $q : c_5$
   $c_4 c_5$ **F**
   Donc, l'ensemble $E \cup \{\neg C\} \models F$, et par conséquent $E \models C$ **(0.5)**

2. Méthode des arbres : On développe l'arbre de $E \cup \{\neg C\} \models F$ **(0.25)**

(2)



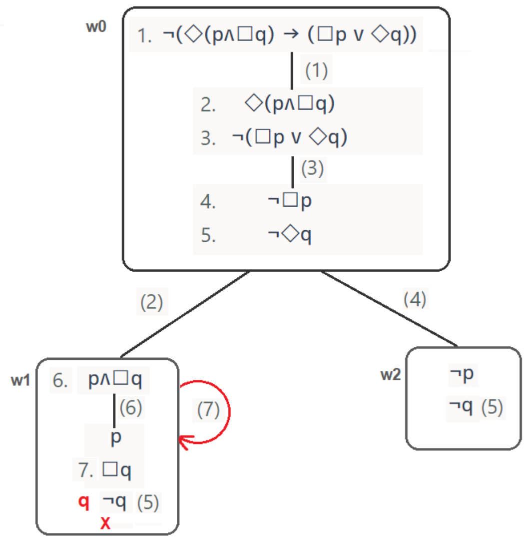
Toutes les branches de $E \cup \{\neg C\} \models F$ se ferment et donc il est inconsistant, et par conséquent $E \cup \{\neg C\} \models F$ **(0.5)**

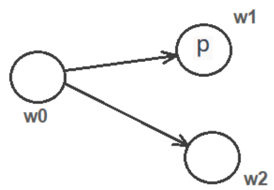
Exercice 2 (4 points)

1. Expliquer via un schéma, la relation entre les systèmes de la logique modale (vus dans le cours). **(0.5)**
2. Considérez la formule suivante en logique modale :

$$\Diamond(p \wedge \Box q) \to (\Box p \vee \Diamond q).$$

— Vérifiez si cette formule est valide dans le système K. Sinon donnez un contre exemple.





Arbre pour K (1.5) **Contre exemple (0.5)**

Il y a une branche ouverte donc la négation de la formule n'est pas inconsistante, par conséquent la formule n'est pas K-valide.**(0.5)**

— Le système le plus général dans lequel cette formule serait valide : T (réflexif) **(0.5)**, (illustration sur l'arbre **(0.5)**)

Exercice 3 (4 points)
Vérifier en utilisant la résolution, la validité de la formule suivante :

$$A : \forall X(p(X) \rightarrow q(X)) \wedge \forall X(q(X) \rightarrow r(X)) \rightarrow \forall X(p(X) \rightarrow r(X))$$

On applique l'algorithme FNC pour $\neg A$ **(0.5)**)
FNC (2) :
$\neg[\neg[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall X(\neg q(X) \vee r(X))] \vee \forall X(\neg p(X) \vee r(X))]$
$\neg[\neg[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall X(\neg q(X) \vee r(X))] \vee \forall X(\neg p(X) \vee r(X))]$
$[\neg\neg[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall X(\neg q(X) \vee r(X))] \wedge \neg\forall X(\neg p(X) \vee r(X))]$
$[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall X(\neg q(X) \vee r(X))] \wedge \exists X\neg(\neg p(X) \vee r(X))]$
$[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall X(\neg q(X) \vee r(X))] \wedge \exists X(\neg\neg p(X) \wedge \neg r(X))]$
$[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall X(\neg q(X) \vee r(X))] \wedge \exists X(p(X) \wedge \neg r(X))]$
Forme propre
$[\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge \forall Y(\neg q(Y) \vee r(Y))] \wedge \exists Z(p(Z) \wedge \neg r(Z))]$
Forme prénexe
$\forall Y \forall X \exists Z[(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge (\neg q(Y) \vee r(Y)) \wedge (p(Z) \wedge \neg r(Z))]$
skolémisation
$\forall Y \forall X[(\neg p(X) \vee q(X)) \wedge (\neg q(Y) \vee r(Y)) \wedge (p(f(X,Y)) \wedge \neg r(f(X,Y)))]$
Forme clausale
$\{c_1 = \neg p(X) \vee q(X), c_2 = \neg q(Y) \vee r(Y), c_3 = p(f(Z,T)), c_4 = \neg r(f(U,W))\}$
Résolution (1))
c_1 et c_3 : $c_5 = q(f(Z',T'))$ $\{X/f(Z,T)\}$ RES
c_2 et c_5 : $c_6 = r(f(Z'',Y''))$ $\{Y/f(Z',T')\}$ RES
c_4 et c_6 : F $\{u/Z'', W/Y''\}$ RES
$\neg A$ est inconsistante. Par conséquent A est valide. **(0.5)**)

Exercice 4 (2 points)
Exprimez en logique temporelle les propriétés suivantes :

1. La propriété p est stable (si elle arrive, elle demeure présente).
$$\mathbf{G}(p \rightarrow \mathbf{G}p)$$
2. si p arrive, alors q doit arriver dans les trois prochains états.
$$p \rightarrow (\mathbf{X}q \wedge \mathbf{XX}q \wedge \mathbf{XXX}q)$$
3. Toute demande est acquittée plus tard et aucune demande supplémentaire n'arrive avant l'acquittement.
$$\mathbf{G}(request \rightarrow (\mathbf{F}acknowledg \wedge \mathbf{X}(\neg request\mathbf{U}acknowledg)))$$
4. q se produit toujours entre une paire d'occurrence de p, et à chaque fois que p se produit, q doit se produire au moins une fois avant la prochaine occurrence de p.
$$\mathbf{G}(p \rightarrow (\mathbf{F}p \wedge \mathbf{X}(\neg p\mathbf{U}q)))$$

★ Bonne réussite ★
Mme. A. MOHAMMEDI