Controle2

Exercice 01 $(\mathbf{06}\boldsymbol{p})$:

Écrire la fonction $f(x) = |x|.sur\ \ x \in [-1,1]$ sous forme de somme des 3 premiers polynome de légendre

Exercice 02 $(\mathbf{07}\boldsymbol{p})$:

Soit l'intégrale suivante : $\int_0^2 \sqrt{\mathrm{x}}\, dx$.

1. Calculer l'intégrale avec la méthode des Simpson généralisée a n=4.
2. **Sachant que** $f^{(2)}(x) = {-1}\big/{4x^{\frac{3}{2}}}$, Calculer l'erreur maximale

Exercice 03 $(\mathbf{07}\boldsymbol{p})$:

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \acute{\mathrm{y}} = \mathrm{y} + \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} \\ \mathrm{y}(0) = 2 \end{cases}$$

1. Calculer la solution approximative de cette équation a l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle $[0,2]$ en 4 parties égales.
2. Sachant que la solution exacte est $\mathrm{y}_{\mathrm{exacte}}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$, comparer le résultat obtenu avec la solution $\mathrm{y}_{\mathrm{exacte}}(0.5)$.

Correction

Exercice 01 :
On a $f(x) = |x|. sur \;\; x \in [-1,1]$
Sous forme de somme des 3 premiers polynômes de Legendre

$$f(x) = \mathrm{a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2}$$

$$\begin{cases} \mathrm{p_0(x) = 1.} \\ \mathrm{p_1(x) = x.} \\ \mathrm{p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} p_n(x) f(x) dx.$$

- $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p_0(x) f(x) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1|x| dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -x dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x dx$

$$a_0 = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x dx = -\frac{1}{4}x^2|_{-1}^{0} + \frac{1}{4}x^2|_{0}^{1}$$

$$a_0 - \frac{1}{4}[0-1\,] + \frac{1}{4}[1-0]$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

- $a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} p_1(x) f(x) dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x|x| dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} -x^2 dx + \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^2 dx$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\; x^3|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^3|_{0}^{1} = -\frac{1}{2}[0+1\,] + \frac{1}{2}[1+0\,]$$

$$a_1 = 0$$

- $a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} p_2(x) f(x) dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}\mathrm{x}^2 - \frac{1}{2}\right)|x| dx$

$$a_2 = \frac{5}{2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}\mathrm{x}^2|x| - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\, dx\right] = \frac{5}{2}\left[-\frac{3}{8}\mathrm{x}^4|_{-1}^{0} + \frac{3}{8}\mathrm{x}^4|_{0}^{1} - \frac{1}{2}\right]$$

$$a_2 = -\frac{5}{8}$$

Donc

$$f(x) = |x| = \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times x - \frac{5}{8} \times \left(\frac{3}{2}\mathrm{x}^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = |x| = \frac{1}{2} + -\frac{15}{16}\mathrm{x}^2 + \frac{15}{16}$$

$$f(x) = |x| = -\frac{15}{16}\mathrm{x}^2 + \frac{13}{16}$$

Exercice 02 :

$f(x) = \sqrt{x.}$ $\quad x \in [0,2],\ \ n = 4, \quad h = 1/2$

1. Calculer l'intégrale avec la méthode des Simpson :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i\ pair} f(x_i) + 4\sum_{i\ impair} f(x_i)\right]$$

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	x_3 =1.5	x_4 =2
$y_0 = 0$	y_1 =0.70711	y_2 =1	y_3 =1.22475	$y_4 = 1.41421$

$$\int_0^2 \sqrt{\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} \approx \frac{0.5}{3}[0 + 1.41421 + 2(1) + 4(0.70711 + 1.22475)]$$

$$\int_0^2 \sqrt{\mathrm{x}\ \mathrm{dx}} \approx \frac{0.5}{3}\ (11.14165) = 1.856942$$

2. Calculer l'erreur maximale

$$E_{max} = \frac{(b-a)^4}{180\ n^4}\ max_{x\in[0,2]}|f^4(x)|$$

On a $f^{(2)}(x) = {}^{-1}\!\big/_{4x^{\frac{3}{2}}}$ donc $f^{(3)}(x) = {}^{3}\!\big/_{8x^{\frac{5}{2}}}$ et $f^{(4)}(x) = {}^{-15}\!\big/_{16x^{\frac{7}{2}}}$

$0 \leq x \leq 2$ donc $-0.083 \leq {}^{-15}\Big/_{16x^{\frac{7}{2}}} \leq 0$

$$E_{max} = \frac{(2-0)^4}{180\ 4^4}\ 0.083$$

$$E_{max} = 5.81 \times 10^{-5}$$

Exercice 03 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \acute{y} = y + e^{2x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$n = 4.$ $\quad h = \frac{2-0}{4} = 0.5, \quad f(x,y) = y + e^{2x}.$

1. Calculer la solution approximative :

   La méthode d'Euler : $\quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$y_0 = 2$	$y_1 = 3.5$	$y_2 = 6.60914$	$y_3 = 13.60824$	$y_4 = 30.45513$

- $y_1 = y_0 + 0.5(y_0 + e^{2x_0}) = 2 + 0.5\big(2 + e^{2(0)}\big) = 3.5$
- $y_2 = y_1 + 0.5(y_1 + e^{2x_1}) = 3.5 + 0.5\big(3.5 + e^{2(0.5)}\big) = 6.60914$
- $y_3 = y_2 + 0.5(y_2 + e^{2x_2}) = 6.60914 + 0.5\big(6.60914 + e^{2(1)}\big) = 13.60824$
- $y_4 = y_3 + 0.5(y_3 + e^{2x_3}) = 13.60824 + 0.5\big(13.60824 + e^{2(1.5)}\big) = 30.45513$

2. comparer le résultat obtenu avec la solution $y_{exacte}(0.5)$.

   $y_{exacte}(x) = e^x + e^{2x}.$

   $y_{exacte}(0.5) = e^{0.5} + e^{2(0.5)} = 4.3670031. \quad y_1 = 3.5.$

$$y_{\text{exacte}}(0.5) - y_1(0.5) = 4.3670031 - 3.5 = 0.8670031$$

Donc

$$y_{\text{exacte}}(0.5) > y_1(0.5).$$